

Τα όρια με χρήση παραγώγων

Είναι γνωστό ότι για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Με τις παραπάνω ιδιότητες δίνεται η δυνατότητα να υπολογίζονται όρια χωρίς να υπάρχει ανάγκη αλγεβρικού μετασχηματισμού για την άρση απροσδιοριστιών τύπου $0/0$.

Κανόνες

1^{ος}

Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις, στο x_0 του κοινού π.ο. τους Δ , με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) = 0$ και $g'(x_0) \neq 0$. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

2^{ος} (1^{ος} κανόνας de l'Hospital)

Αν f, g παραγωγίσιμες, κοντά στο x_0 , συναρτήσεις με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ και υπάρχει

το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

3^{ος} (2^{ος} κανόνας de l'Hospital)

Αν f, g παραγωγίσιμες, κοντά στο x_0 , συναρτήσεις με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ και υπάρχει

το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

Παρατηρήσεις

1. Για τους κανόνες de l'Hospital είναι απαραίτητο να πληρούνται και οι τρεις προϋποθέσεις (παραγωγίσιμες, απροσδιοριστία, ύπαρξη του $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$).

2. Όταν f, g παραγωγίσιμες, κοντά στο x_0 , συναρτήσεις με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$

τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)]$ μπορεί να γίνει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ και να έχουμε δυνατότητα

εφαρμογής των παραπάνω κανόνων de l'Hospital.

3. Οι κανόνες de l'Hospital δεν προσφέρονται για κάθε περίπτωση.

Δηλ. Τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1}$ ή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 2^x}{3^{x+1} + 2^x}$ οδηγούν σε ατέρμονες διαδικασίες ακολουθώντας τους.